



الإمتحان السداسي الأول في مقياس الجبر

قسم: تكنولوجيا المدة: ساعتان سنة أولى جذع مشترك تكنولوجيا

التمرين الأول (07 نقاط):

(1) لتكن P, Q و R ثلاث قضايا.
ياستعمال جدول الحقيقة، بين أن:

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \vee R \iff (P \vee R) \wedge (\overline{Q} \vee R)$$

(2) برهن بالتراجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k.$$

(3) ليكن $a > 0$ و $b > 0$. برهن بالعكس النقيض أن:

$$\frac{a}{b} < \sqrt{3} \implies \frac{a+3b}{a+b} > \sqrt{3}.$$

(4) برهن بالخلف أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2 + n} \notin \mathbb{N}.$$

التمرين الثاني (03 نقاط)

لتكن E مجموعة و A, B, C مجموعات جزئية من E . و لتكن $\bar{A}$ متممة A بالنسبة لـ E .
برهن أن:

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C). \quad (1)$$

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B. \quad (2)$$

التمرين الثالث (05 نقاط):

ليكن التطبيق $f : E \rightarrow F$.

(1) بين أن:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

(2) أوجد الشرط اللازم والكافي بحيث

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

مع التبرير؟

(3) أوجد مثال بحيث:

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

مساعدة: نأخذ: $f(x) = x^2$ و $E = \mathbb{R}$.

التمرين الرابع (05 نقاط):

f تطبيق من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ معرف بـ:

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

(1) أدرس تغيرات f .

(2) أستنتج أن f متباين.

(3) عين $f(\mathbb{R})$ ، $f^{-1}(\{-1\})$.

(4) هل f تقابلي من $\mathbb{R}$ نحو $[-1, 1]$ ؟ علل.

بالتوفيق

تصحيح الامتحانات الأساس الأول
في مقياس الجبر

(1)

لا غدره كذا

02

حل القرن الأول (07 نقاط)

P	Q	R	$\bar{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \bar{Q}$	$(P \Rightarrow Q) \vee R$	$P \vee R$	$\bar{Q} \vee R$	$(P \vee R) \wedge (\bar{Q} \vee R)$	$① \Leftrightarrow ②$
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1

بذلك صحت جدول الحقيقة فالتساوي $(P \Rightarrow Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\bar{Q} \vee R)$ صحيح.

نضع $P(n): \forall n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$
من أجل $n=0$:

$$0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 9 \Rightarrow 9(1) = 9k / \exists k=1$$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل الرتبة n ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة من أجل الرتبة $n+1$ أي: $\exists k' \in \mathbb{N} : (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 9k'$ ؟

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\ &= 9k + 9n^2 + 27n + 27 \quad / k \in \mathbb{N} \\ &= 9(k + n^2 + 3n + 3) \\ &= 9k' / \exists k' = k + n^2 + 3n + 3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

لذلك $P(n+1)$ صحيحة.

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$

(3) انكسار التقييد الاستلزام هو: $\frac{a}{b} \geq \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a+3b}{a+b} \leq \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \frac{a+3b}{a+b} \leq \sqrt{3} &\Rightarrow (a+3b) \leq (a+b)\sqrt{3} \\ &\Rightarrow a+3b \leq a\sqrt{3} + b\sqrt{3} \\ &\Rightarrow a - a\sqrt{3} \leq b\sqrt{3} - 3b \\ &\Rightarrow a(1-\sqrt{3}) \leq b(\sqrt{3}-3) \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}-3}{1-\sqrt{3}} \quad (1-\sqrt{3} < 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})} \Rightarrow \frac{a}{b} \geq \sqrt{3}$$

(2)

من حيث مبرهن البرهان الثاني (التقريب الثاني):

$$(0,25) \frac{a}{b} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a+3b}{a+b} > \sqrt{3}$$

(4) نعرض أن: $\exists n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+n} \in \mathbb{N}$

يعني أن: $\exists k \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+n} = k$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n^2+n = k^2$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < n < 2n+1 \Rightarrow n^2 < n^2+n < (n+1)^2$$

$$(0,5) \Rightarrow n^2 < k^2 < (n+1)^2$$

$$\Rightarrow n < k < (n+1)$$

وهذا تناقض مع الفرض كون $k \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي:

$$(0,25) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{n^2+n} \notin \mathbb{N}$$

حل التمرين الثاني: (03 نقاط)

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1)$$

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$$

(الوصول
تجميعي)

$$(2) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$$

دعونا:

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B \quad (2)$$

(التقاطع يوزع على الاتحاد)

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B)$$

(1)

$$= A \cap B$$

دعونا:

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

④ حل التمرين الرابع : (05 نقاط)

(1) f معرفة و مستمرة و قابل للأشتقاق على $\mathbb{R}$: (0,5)
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n} = 1$ (0,2) , $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n}{1-n} = -1$ (0,2)

$f'(n) = \frac{1}{(1+n)^2} > 0$ (0,2) $\sin n > 0$, $f'(n) = \frac{1}{(1-n)^2} > 0$, $\sin n < 0$ (0,2)
 جدول تغيرات f

n	$-\infty$	$+\infty$
$f'(n)$		+
$f(n)$	-1	+1

(2) حسب جدول التغيرات : f متزايدة تمامًا (بسيطة) خان :

f متباينة (0,5)
 • $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ (حسب جدول التغيرات) (0,5)
 • $f^{-1}(\{-1\}) = \{n \in \mathbb{R} : f(n) \in \{-1\}\}$ (3)
 $f(n) \in \{-1\} \Leftrightarrow f(n) = -1 \Leftrightarrow \frac{n}{1+n} = -1$ (0,2)

كما $n > 0 : n = 1 - n \Leftrightarrow 2n = 1$
 $\frac{n}{1+n} = -1 \Leftrightarrow n = -1 - n \Leftrightarrow 2n = -1$ (0,2)
 $\Leftrightarrow n = -\frac{1}{2}$ (مرفوض لأن $n > 0$)

كما $n < 0$:
 $\frac{n}{1-n} = -1 \Leftrightarrow n = -1 + n \Leftrightarrow 0 = -1$ (تناقض) (0,2)

لذلك : $f(\{-1\}) = \emptyset$ (0,2)
 (4) كون $f(\{-1\}) = \emptyset$ يعني أن العدد -1 ليس له سابقة في $\mathbb{R}$ بالتطبيق f .

ولذلك : f ليس عامر (0,5)
 كذلك : f ليس متناهي (0,1)